Teoria sterowania

Wojciech Rafajłowicz, Paweł Drąg

February 2019

1 Algebra liniowa - powtórzenie

Podprzestrzeń i wymiar przestrzeni

Podprzestrzeń $S \in \mathcal{R}^n$ jest zbiorem wektorów w $\mathcal{R}^n$ takim, że dla dowolnych dwóch wektorów

$$s_1, s_2 \in S \tag{1}$$

oraz dowolnych

$$\alpha, \beta \in \mathcal{R} \tag{2}$$

spełniony jest warunek

$$\alpha s_1 + \beta s_2 \in S \tag{3}$$

Rozpiętość zbioru $S \subset \mathcal{R}^n$ jest określona jako zbiór wszystkich liniowych kombinacji elementów zbioru S. Weżmy pod uwagę zbiór wektorów

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \in \mathcal{R}. \tag{4}$$

Wtedy zbiór wektorów

$$S = \{s | s = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_m e_m, \alpha_i in \mathcal{R}\} \tag{5}$$

jest podprzestrzenią i rozpina przestrzeń S.

Zbiór wektorów $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \in \mathcal{R}$ jest liniowo niezależny, jeżeli

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots \alpha_m e_m = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_m = 0. \tag{6}$$

Zbiór wektorów $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ jest bazą przestrzeni, rozpina przestrzeń S i jest liniowo niezależny.

Wymiar przestrzeni określa najmniejszą konieczną liczbę wektorów rozpinających tą przestrzeń

Ćwiczenie

Rozważmy wektory

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

które tworzą bazę przestrzeni $S \subset \mathcal{R}^3$. Ponieważ

$$e_1 - e_2 - e_3 = 0, \tag{8}$$

wektory te nie są liniowo niezależne. Dlatego też

$$\dim S = 2. \tag{9}$$

Rząd macierzy

Rzędem macierzy A nazywamy wymiar przestrzeni wektorowej rozpiętej na kolumnach macierzy. Przestrzeń zerowa macierzy A jest zbiorem wektorów takich, że

$$null(A) = \{w|0 = Aw\} \tag{10}$$

Odwrotność macierzy

Odwrotnością macierzy A nazywamy macierz A^{-1} taką, że

$$AA^{-1} = I, \tag{11}$$

gdzie I to macierz jednostkowa.

Właściwości wyznacznika

a) $|AB| = |A||B|$

b) Jeżeli $A_{n\times n}$, to $|A| = 0 \iff \text{rank }(A) < n$.

c) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Wartości własne i wektory własne

Wartości własne λ_i macierzy $A_{n\times n}$ spełniają warunek

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{12}$$

Równanie (12) nazywamy równaniem charakterystycznym macierzy.

Wektorem własnym nazywamy wektor

$$v = 0 \tag{13}$$

taki, że

$$Av = \lambda v \tag{14}$$

lub równoważnie

$$(A - \lambda I)v = 0. \tag{15}$$

Formy kwadratowe

Rozważmy funkcję skalarną $f(x)$ następującej postaci

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{16}$$

Funkcję $f(x)$ nazywamy formą kwadratową.

Przykład

Niech

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

wtedy

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 \tag{18}$$

Definicja Jeżeli dla każdego wektora x

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle \geq 0, \tag{19}$$

wtedy $f(x)$ nazywamy formą nieujemnie określoną. Macierz A jest nieujemnie określona.

Zadana - lista 1

1. Rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ 10x_2 - 10x_3 - x_4 & = & 1 \end{array} \tag{20}$$

2. Rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 & = & -26 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 & = & -4 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 + 11x_4 & = & -10 \end{array} \tag{21}$$

3. Oblicz przestrzeń zerową macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -7 & 4 \end{bmatrix} \tag{22}$$

4. Oblicz α i β

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

5. Załóżmy, że $S = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \}$, $W = \operatorname{span} S$ oraz $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -12 \\ -5 \end{bmatrix}$. Czy $x \in W$?

6. Dla macierzy A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

- odszukaj zbiór $S = \{z_1, z_2\}$ taki, że $S = N(A)$,

- sprawdź, czy $z = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in N(A)$,

- zapisz z jako liniową kombinację wektorów z_1 i z_2.

7. Oblicz przestrzeń zerową macierzy A

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{25}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \tag{26}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Figure 1: The Universe

2 Conclusion

"I always thought something was fundamentally wrong with the universe" [1]

References

[1] D. Adams. *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*. San Val, 1995.